Série n° 4

– Différentiabilité et Calcul différentiel –

Exercice 1

1°) Montrer d'aprés la définition que la fonction

$$fx,y) = x^2 + y^2$$

est différentiable dans $\mathbb{R}^2$ et calculer la différentielle.

2°) L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par: .

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

est-elle différentiable en $(0,0)$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\nvDash$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^3y-xy^3)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

2°) Déterminer si les dérivées partielles $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_y f(0,0)$ existent et les calculer le cas échéant.

3°) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

4°) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $\mathbb{R}^2$?

2°) Calculer $\nabla f(x,y)$

3°) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

Dire si le graphe de f :

$$\mathcal{G}_f = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{t.q} z = f(x,y)\}$$

admet un plan tangent au point $(0,1,-1)$ et, le cas échant, donner l'équation du plan.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $\mathbb{R}^2$?

2°) Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, calculer ensuite $\nabla f(0,0)$

3°) La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$$

1°) Déterminer D.

2°) Déterminer la différentielle en tout point $(x,y) \in D$

3°) Calculer $d_{(0,2)}f$ en les vecteurs $\overrightarrow{i} = (1,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1)$ et $\overrightarrow{v} = (1,1)$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^3 \cos(\frac{1}{x^2+y^2}), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $\mathbb{R}^2$?

2°) Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, calculer ensuite $\nabla f(0,0)$

3°) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

4°) Sans faire de calculs, que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(x,y) = (\sin(x+2y), \cos(2x+y))$$

1°) Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$

2°) Calculer sa différentielle.

3°) Calculer la matrice Jacobienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$